ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 8 FÉVRIER 1943.

PRÉSIDENCE DE M. GABRIEL BERTRAND.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Président** annonce à l'Académie le décès de deux de ses Correspondants pour la Section de Médecine et Chirurgie : M. **Jean Sabrazès**, professeur honoraire d'Anatomie pathologique et de Microscopie clinique à la Faculté de Médecine de Bordeaux, mort à Bordeaux, le 30 janvier, et M. **Émile Forgue**, professeur honoraire de Clinique chirurgicale à la Faculté de Médecine de Montpellier, mort à Grave (Ariège), le 1er février.

M. **Alfred Lacroix** présente à l'Académie, de la part de Mme **Louis de Launay**, une élégante et pieuse plaquette, consacrée par elle à notre regretté Confrère, à son œuvre géologique, philosophique, poétique et à sa longue vie si bien remplie à tous les points de vue.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Détermination des adjoints de quelques opérateurs linéaires non bornés de l'espace hilbertien.* Note de M. **Gaston Julia**.

1. J'ai antérieurement montré [1] que, dans l'espace hilbertien $\mathcal{H}$, de base orthonormale (e_n), la donnée d'un système infini de vecteurs (A_n) permet de définir un opérateur linéaire A par les conditions initiales $\mathrm{A}\,e_n = \mathrm{A}_n$, doublées de prolongements convenables. A est alors uniforme dans $\{e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$ avec $\mathrm{A}\left(\sum^{n} x_k e_k\right) = \sum^{n} x_k \mathrm{A}_k$. Lorsque $\mathrm{X} = \sum^{\infty} x_k e_k$ est dans le noyau d_{A} où converge fortement la série $\sum^{\infty} x_k \mathrm{A}_k$, la somme de cette série définit la valeur de AX. Le noyau d_{A} est intérieur au noyau d'_{A} où converge faiblement la suite $\sum^{n} x_k \mathrm{A}_k$, et la valeur de la limite faible est évidemment une fonction linéaire de X, qui prolonge dans d'_{A} la valeur AX définie dans d_{A} par la limite forte de $\sum^{n} x_k \mathrm{A}_k$.

---

(1) *Comptes rendus*, **212**, 1941, pp. 733-736.

On peut déterminer l'adjoint exact de A ainsi défini dans d_A ou d'_A par la limite forte ou faible de $\sum^{n} x_k A_k$, et l'on constate qu'il est le même.

2. Prenons d'abord $AX = \sum^{\infty} x_k A_k$ pour $X = \sum^{\infty} x_k e_k$ dans d_A. Pour appartenir au domaine d'existence de l'adjoint, T devra être choisi tel que $|(T, AX)| . \|X\|^{-1}$ reste borné dans tout d_A. d_A étant partout dense dans $\mathcal{H}$, on aura dans ce cas $(T, AX) = (T^\star, X)$ et l'adjoint $A^\star$ de « A dans d_A » sera défini en T par $A^\star T = T^\star$. On voit que $(T, AX) = \sum^{\infty} x_k . (T, A_k) = \sum^{\infty} \overline{(A_k, T)} . x_k$ pour tout X de d_A. En particulier, pour tous les $X = \sum^{n} x_k e_k$, (x_k arbitraire), on devra avoir

$$\left| \sum^{n} \overline{(A_k, T)} . x_k \right| . \left(\sum^{n} |x_k|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} < M,$$

M fixe, indépendant de n et des x_k, ce qui, en choisissant $x_k = (A_k, T)$, pour $k = 1, 2, \ldots, n$, donne $\sum^{n} |(A_k, T)|^2 < M^2$ pour tout n. T devra donc appartenir au domaine de convergence de la série $\sum^{\infty} |(A_k, T)|^2$.

Inversement, en tout point T de ce domaine de convergence, la série fortement convergente $\sum^{\infty} e_k (A_k, T)$ définit un opérateur linéaire $BT = \sum^{\infty} e_k (A_k, T)$ et l'on aura $(T, AX) = \sum^{\infty} \overline{(A_k, T)} . x_k = (BT, X)$; par suite $|(T, AX)| . \|X\|^{-1} \leq \|BT\|$ pour tout X de d_A, ce qui signifie que l'adjoint de « A dans d_A » est défini en T, sa valeur $A^\star T$ n'étant autre que $BT = \sum^{\infty} e_i (A_i, T)$.

L'adjoint de « A dans d_A » est aussi défini avec précision, ainsi que son domaine : c'est $A^\star T = \sum^{\infty} e_i (A_i, T)$, dans le domaine de convergence de $\sum^{\infty} |(A_i, T)|^2$ que nous appellerons $D_{A^\star}$.

3. Un raisonnement analogue vaut pour A défini dans d'_A par $AX =$ limite faible de $\sum^{n} x_k A_k$. L'adjoint de cet A sera défini en T si $|(T, AX)| . \|X\|^{-1}$ reste borné dans d'_A. Or, pour tout T de $\mathcal{H}$,

$$(T, AX) = \lim_{n=\infty} \sum^{n} \overline{(A_k, T)} . x_k = \sum^{\infty} \overline{(A_k, T)} . x_k,$$

cette série convergeant pour tout T de $\mathcal{H}$ et tout X de d'_A. Considérant en particulier les $X = \sum^{n} x_k e_k$ de d'_A, on verra, comme au n° 2, que T devra faire

converger la série $\sum^{\infty}|(A_k, T)|^2$. Réciproquement, si T est ainsi choisi, la série $\sum^{\infty}\overline{(A_k, T)}.x_k$ converge absolument et l'on a : $(T, AX)=(BT, X)$ pour tout X de d'_A, ce qui établit que l'adjoint de « A dans d'_A » existe en T avec $A^{\star}T = BT = \sum^{\infty} e_k(A_k, T)$. L'adjoint de « A dans d'_A » est identique à l'adjoint de « A dans d_A ».

4. Plus généralement, considérons le noyau d''_A des $X=\sum^{\infty} x_k e_k$ pour lesquels $\varliminf_{n=\infty}\left\|\sum^{n} x_k A_k\right\| < +\infty$; $\Big($il contient tous les points pour lesquels $\varlimsup_{n=\infty}\left\|\sum^{n} x_k A_k\right\| < +\infty$, il contient d'_A et $d_A\Big)$. Soit X un de ses points, pour lequel une suite partielle $\sum^{n_i} x_k A_k$ converge faiblement vers une limite Y. Pour tout T de $\mathcal{H}$, on a $(T, Y)=\lim_{i=\infty}\sum^{n_i}\overline{(A_k, T)}.x_k=\sum^{\infty}\overline{(A_k, T)}.x_k$. En prenant T tel que $\sum^{\infty}|(A_k, T)|^2$ converge, la série $\sum^{\infty}\overline{(A_k, T)}.x_k$ converge absolument et sa somme est indépendante de la suite n_i. Deux limites faibles quelconques Y et Y′ de la suite $\sum^{n} x_k A_k$ sont donc telles que $(T, Y)=(T, Y')$ pour tout T de $D_{A^{\star}}$. *Elles sont donc égales si* $D_{A^{\star}}$ *est partout dense*. On peut alors parler de *la limite faible* de $\sum^{n} x_k A_k$, bien qu'il puisse à priori exister des suites $\sum^{n_i} x_k A_k$ qui, ne restant pas bornées, ne convergent pas faiblement. *Toutes les fois que d''_A sera une variété linéaire*, la limite faible précédente sera une fonction linéaire de X, définie dans d''_A, égale à A_k pour $X=e_k$; c'est un prolongement de A dans tout d''_A, et l'on verrait, par un raisonnement analogue à celui du n° 2, que son adjoint est encore $A^{\star}T=\sum e_k(A_k, T)$ défini dans $D_{A^{\star}}$ où converge $\sum|(A_k, T)|^2$.

L'opérateur $A^{\star}T=\sum^{\infty} e_k(A_k, T)$, apparaissant comme l'adjoint de A dans d_A, d'_A ou d''_A, sera nécessairement *fermé dans* $D_{A^{\star}}$, ce que l'on peut aisément vérifier par un calcul direct. En effet, si T_n de $D_{A^{\star}}$ et $A^{\star}T_n$ ont des limites fortes T et $T^{\star}$, pour $n=\infty$, on a, pour chaque k, $(e_k, T^{\star})=\lim_{n=\infty}(e_k, A^{\star}T_n)=\lim_{n=\infty}(A_k, T_n)=(A_k, T)$, ce qui prouve 1° que T appartient à $D_{A^{\star}}$ et 2° que $T^{\star}=\sum^{\infty} e_k(A_k, T)=A^{\star}T$.

5. Considérons maintenant l'opérateur $A^{\star}$ défini par $A^{\star}X=\sum^{\infty} e_k(A_k, X)$

dans le domaine D_{A^*} où converge la série $\sum^{\infty} |(A_k, X)|^2$. Supposons D_{A^*} *partout dense dans* $\mathcal{H}$ et cherchons l'adjoint A^{**} de « A^* dans D_{A^*} ».

Un point $T = \sum^{\infty} t_k e_k$ appartient au domaine de cet adjoint si $|(T, A^*X)| . \|X\|^{-1}$ reste borné dans D_{A^*}. Or $(T, A^*X) = \sum^{\infty} \overline{t_k}(A_k, X)$, série absolument convergente pour tout T de $\mathcal{H}$ et pour tout X de D_{A^*}. De plus

$$(T, A^*X) = \lim_{n_i=\infty} \sum^{n_i} \overline{t_k}(A_k, X) = \lim_{n_i=\infty} \left(\sum^{n_i} t_k A_k, X \right)$$

prouve que, si T est tel qu'il existe une suite infinie d'indices n_i croissants, pour lesquels $\left\| \sum^{n_i} t_k A_k \right\| < M$ (M fixe), on aura $|(T, A^*X)| \leq M \|X\|$ dans tout D_{A^*}, et T appartiendra au domaine $D_{A^{**}}$ de l'adjoint cherché. Ceci prouve que $D_{A^{**}}$ contient d''_A, et que, dans d''_A, A^{**} coïncide avec le prolongement de A signalé au n° 4. Ceci fournit une espèce de limite inférieure pour $D_{A^{**}}$. Pour circonscrire davantage $D_{A^{**}}$, par une espèce de limite supérieure, nous devrons faire des *hypothèses supplémentaires sur le système* A_i, *entraînant d'ailleurs le fait que* D_{A^*} *est partout dense dans* $\mathcal{H}$, comme je le montrerai ultérieurement.

PHYSIOLOGIE. — *Sur l'arrêt respiratoire dans les accidents d'électrocution.* Note de M. Léon Binet et Mlle Madeleine Poutonnet.

La syncope respiratoire déterminée par l'électrocution mérite, croyons-nous, une étude analytique approfondie tant à cause de l'intérêt biologique du problème que pour les applications pratiques qu'elle doit dicter. Notre étude est basée sur 85 animaux soumis à l'électrocution dans les conditions suivantes.

Technique. — Sur des chiens chloralosés (10^{cg} par kilo), nous avons enregistré la pression artérielle, la pression veineuse, la pression intra-trachéale, les mouvements thoraciques, la pression pleurale, en même temps que nous avons suivi les variations de la composition histologique et chimique du sang et l'évolution de la température rectale.

L'électrocution a été réalisée sur des chiens chloralosés (10^{cg} par kg) avec le courant de la ville : 110 V, 50 périodes par seconde. Sur le circuit, sont montés en série un rhéostat à résistance variable qui permet de régler l'intensité du courant et un ampèremètre, permettant d'apprécier 5 mA et rendant compte à chaque instant de l'intensité du courant qui traverse le chien. Le courant arrive à l'animal par deux électrodes qui sont des plaques métalliques entourées de feutre imbibé d'eau salée. Elles sont appliquées sur la peau du chien préalablement rasée et bien mouillée.

Dans ces expériences, les électrodes ont été placées, une sur le sommet de la

tête et l'autre sur la nuque. Connaissant les perturbations cardiaques déclenchées par l'électrocution, nous avons éliminé ici les dérivations de courant passant par le cœur. D'autre part, pour étudier le phénomène respiratoire aussi pur que possible, nous avons soumis l'animal à l'atropinisation, (0^{mg},1 de sulfate d'atropine par kilo), qui s'oppose en partie à la syncope cardiaque.

Ce sont ces seules expériences qui vont nous retenir ici.

Sur un chien chloralosé et atropinisé, un courant, en général supérieur à 25 mA (ce seuil variant de 10 à 25 mA suivant les animaux), provoque un arrêt respiratoire immédiat. Le thorax est alors bloqué en inspiration forcée, il y a une contracture généralisée, les yeux sont révulsés vers le bas. Si l'intensité du courant reste faible (jusqu'à 1 A), cette intensité limite variant beaucoup d'un animal à l'autre, le chien reprendra spontanément sa respiration; cette apnée passagère a une durée qui va en diminuant si l'agression électrique est pratiquée plusieurs fois de suite et à un intervalle de temps inférieur à 30 minutes : il semble y avoir accoutumance du centre respiratoire. Un chien de 14^{kg},300 est soumis toutes les 10 minutes à un courant de 25 mA. Il présente des arrêts respiratoires dont les durées sont successivement 3 min. 50 sec.; 2 min. 5 sec.; 1 min. 43 sec.; 1 min. 40 sec.; 1 min. 43 sec.; 2 min.; 1 min. 50 sec. et 1 min. 45 sec.

Si l'intensité est assez forte pour empêcher le retour spontané des mouvements respiratoires et si l'animal est à l'air libre, l'apnée aboutit à la mort par asphyxie : la langue bleuit, la tension s'élève et le cœur s'arrête après un temps qui a varié de 2 min. 45 sec. à 7 min. 30 sec. suivant les chiens.

Nous avons étudié les moyens d'empêcher cette mort d'ordre asphyxique et nous voudrions souligner les résultats obtenus lorsque l'appareil respiratoire de l'animal est en relation avec un réservoir d'oxygène pur.

Des auteurs américains ont montré, dans les troubles respiratoires expérimentaux, la portée pratique de l'insufflation permanente d'oxygène. Ces dernières années, M. Strumza, dans notre laboratoire, a obtenu des survies de plusieurs heures chez des animaux mis en apnée par de fortes doses de chloralose et divers procédés expérimentaux, et maintenus en survie pendant plusieurs heures grâce à une connexion de la trachée avec un réservoir d'oxygène. Il nous a semblé intéressant de mettre la trachée de l'animal en relation avec le spiromètre de Tissot rempli d'oxygène. L'animal inspire de l'oxygène pur, expire à l'air libre, et ce n'est qu'au bout de 10 à 15 minutes que l'agression par courant électrique est effectuée. L'animal y répond par l'arrêt respiratoire, mais malgré la continuation de l'apnée, il présente une survie qui mérite une étude analytique.

Étude de l'apnée. — L'apnée de cet animal soumis à de telles conditions expérimentales est une apnée de durée, et nous l'avons réalisée souvent pendant 20 min., 30 min., 50 min. et même 1 h. 10 min. avec des courants

variant de 0,1 à 2 A. Si à ce moment on coupe le courant, la respiration repart spontanément, augmentée dans l'amplitude d'abord, dans son rythme ensuite. Si l'apnée est de plus longue durée (1 h. 30 min.), la respiration reparaît bien, mais il peut y avoir, lors du retour de l'animal aux conditions normales, une défaillance du cœur qui entraîne la mort.

Rapportons ici un protocole expérimental. Un chien est soumis pendant 26 min. 30 sec. à un courant de 240 mA. Avant le passage du courant son débit respiratoire était de $1^l,850$; il passe à $5^l,360$ une minute après la rupture du courant. Le rythme monte de 6,5 à 9, une minute après la rupture, pour atteindre 21, quatre minutes après. Pendant l'apnée, si nous examinons l'échelle graduée du spiromètre, nous notons une absorption régulière de O^2 à travers l'appareil respiratoire immobilisé de l'animal qui est, dans le cas présent, de $0^l,175$ par minute.

On est frappé, au cours de l'apnée ainsi provoquée, par l'existence de manifestations circulatoires importantes. La tension artérielle subit une ascension immédiate (il n'y a plus de chute de tension due à l'excitation des nerfs pneumogastriques du fait que l'animal a été préalablement atropinisé); au contraire, la tension qui était de $190\text{-}154^{mm}$ de mercure avant le passage du courant, atteint $350\text{-}340^{mm}$ Hg, 30 secondes après la fermeture et baisse progressivement, passant à $250\text{-}240^{mm}$ Hg à la 5e minute, $210\text{-}196^{mm}$ Hg à la 10e minute, $170\text{-}160^{mm}$ Hg à la 15e, 140-130 à la 20e pour arriver à $70\text{-}80^{mm}$ Hg à 26 min. 30 sec. Si à ce moment, le courant est coupé, la tension remonte. Trente secondes après la rupture elle est de $170\text{-}150^{mm}$ Hg, 200-160 une minute après, et se fixe à 190-170 au bout de 10 minutes. L'arythmie respiratoire qui avait disparu pendant l'apnée reparaît immédiatement.

Pendant cette séance d'électrocution, l'hypotension grave peut amener la mort de l'animal; l'expérience nous a montré que si l'on fait, au moment où elle s'installe, des mouvements de respiration artificielle dans l'oxygène, par pressions rythmées, sur le couvercle du spiromètre, la tension remonte verticalement de 50^{mm} Hg en 40 secondes, et nous avons été amenés à expliquer ce fait par une atelectasie survenue progressivement. Une dizaine de mouvements respiratoires artificiellement provoqués par la manœuvre précitée suffisent pour combattre l'atelectasie menaçante.

L'examen du sang de nos chiens en expérience nous a montré une élévation du CO^2 total plasmatique : il passe de 55 à 63 vol. en 23 minutes avec un courant de 400 mA, de 48 à 67 en 22 min. 45 sec. avec un courant de 1,5 A, pour tomber au-dessous de la normale (25, dans le cas précédent) aussitôt la reprise respiratoire.

Dans la plupart des cas, nous avons noté une hyperglycémie notable : $1^g,61$, $1^g,93$, $2^g,20$ et une élévation du taux des globules rouges dans le sang circulant.

Le temps de coagulation diminue et passe en 20 minutes avec un courant

qui a atteint 2 A, de 9 min. à 3 min. 30 sec., contrairement à ce que l'on observe chez les animaux mis en apnée, soit par un toxique, soit par un double pneumothorax ou une décérébration et qui présentent une hypothermie progressive; la température subit une élévation de 1° à 1°,5 en une heure, du fait des contractures importantes de l'animal.

En résumé, la syncope respiratoire due au courant électrique qui tue en quelques minutes à l'air libre, peut être tolérée, quelle que soit l'intensité du courant, si l'animal est soumis avant et pendant l'électrocution à une oxygénation suffisante.

Il y a là une belle confirmation des recherches de A. d'Arsonval qui avait souligné l'importance des phénomènes respiratoires dans la mort par électrocution.

CORRESPONDANCE.

M. le **Ministre Secrétaire d'État a l'Éducation Nationale et a la Jeunesse** invite l'Académie à lui présenter une liste de candidats à chacune des deux chaires d'*Anatomie comparée* et de *Physiologie générale* vacantes au Muséum National d'Histoire Naturelle.

(Renvoi, pour la première, à la Section d'Anatomie et Zoologie et, pour la seconde, à la Section de Médecine et Chirurgie.)

M. le **Secrétaire perpétuel** signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° Secrétariat d'État aux Colonies. Direction du service de santé. *La Situation sanitaire de l'Empire français pendant l'année* 1940, par le Médecin Colonel Le Gall. *Protection de la maternité et de l'enfance indigènes pendant l'année* 1940, par le Médecin Colonel Giordani.

2° G. Oriano de Vaucouleurs. *La planète Mars en* 1941.

ARITHMÉTIQUE. — *Sur les applications arithmétiques de certains théorèmes dus à É. Picard.* Note de M. **André Roussel**.

Pour exprimer que le nombre u est entier on peut écrire

$$\sin \pi u = 0.$$

On conçoit, par l'application systématique de cette idée, qu'un problème d'arithmétique puisse se ramener à l'étude d'un système de la forme

$$\sin \pi f_i = 0, \tag{1}$$

les f étant des expressions dépendant de certaines variables jouant le rôle

d'inconnues. Or É. Picard, étendant des résultats de Kronecker, a établi des théorèmes généraux donnant le nombre des solutions (supposées simples) d'un système d'équations qui sont contenues dans un domaine donné ([1]). Ainsi le nombre des solutions d'un système tel que

$$P(x, y) = Q(x, y) = 0$$

contenues dans une aire A limitée par un contour C, s'exprime par la somme de deux intégrales, l'une étendue au contour C, l'autre à l'aire A, dont nous ne rappelons pas l'expression ici faute de place.

Partant de l'idée exprimée au début, on peut prévoir que l'application de ces théorèmes (après éventuellement une adaptation convenable) à des systèmes (1), fournissent, théoriquement du moins, la solution des problèmes envisagés. On peut former ainsi de nombreuses *fonctions arithmétiques*. Nous indiquerons ici seulement le principe de deux applications importantes :

1° Le nombre des solutions du système

$$\sin \pi x = 0, \qquad \sin \pi \left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

contenues dans le domaine rectangulaire

$$2 - \frac{1}{2} \leqq x \leqq n - \frac{1}{2}, \qquad m - \frac{1}{2} \leqq y \leqq n + \frac{1}{2}$$

est égal au nombre k des entiers *non premiers* compris entre m et n. Appliqué au système précédent, le théorème de É. Picard mentionné donne l'expression exacte de k, d'où le nombre des entiers premiers compris entre m et n. En faisant $m = n = p$, on obtient, sous forme analytique, une condition nécessaire et suffisante pour que p soit premier.

2° N étant un entier quelconque supérieur à un, p un entier inférieur à N, on voit facilement que le nombre des solutions du système

$$\sin \pi x = 0, \qquad y - \sin \pi \frac{p}{x} = 0,$$

qui sont contenues dans le rectangle

$$\frac{1}{2} \leqq x \leqq N + \frac{1}{2}, \qquad -\sin \frac{\pi}{N} \leqq y \leqq \sin \frac{\pi}{N},$$

est égal au nombre d des diviseurs de p. L'expression de d en fonction de p est donnée par le même procédé. On peut songer à utiliser la méthode précédente pour chercher à obtenir des indications relatives au nombre r des solutions entières de l'équation

$$z^n = x^n + y^n$$

comprises dans un certain domaine. Mais les intégrales dont la somme donne r

---

([1]) Voir É. Picard, *Traité d'Analyse*, II, Chap. VII, p. 205 à 220, Paris, 1905.

(on devrait avoir r nul si le dernier théorème de Fermat est exact) paraissent difficiles à étudier.

Dans tout ce qui précède les variables sont réelles.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Sur une théorie analytique nouvelle des grosses planètes du système solaire.* Note de M. **Henri Roure**.

Nous avions essayé de faire la théorie analytique de Pluton ([1]) en adaptant à cet effet la méthode que Hill et Brown ont utilisée pour la Lune. Nous avons ensuite étudié les petites planètes par groupes ([2]) en adaptant cette même méthode à ce cas particulier.

Nous avons maintenant transformé la méthode de manière à pouvoir l'appliquer à l'étude des grosses planètes du système solaire.

Dans la méthode de Hill-Brown, le mouvement de la Lune est rapporté au plan parallèle à l'écliptique mené par le centre de la Terre pris comme origine, et le mouvement du Soleil est rapporté au plan passant par le centre de gravité du système Terre-Lune, et parallèle au premier. La latitude du Soleil est supposée nulle. Dans notre méthode, nous supposons tous les corps rapportés au centre du Soleil et au plan de l'écliptique, introduisant ainsi les latitudes des planètes. Nous avons obtenu ainsi des équations simples pour déterminer les coefficients des développements en séries, les *calculs étant uniformes et purement algébriques*.

Notre méthode primitive supposait les deux planètes, troublée et troublante, dans l'écliptique. Nous avons démontré ([3]) que l'on peut supposer seulement la planète troublée dans l'écliptique, et tenir compte, dès la première approximation, de la latitude de la planète troublante, *la forme des intégrales des équations du problème ne changeant pas*.

Actuellement, nous avons développé cette dernière méthode et formé des séries où *la latitude de la planète troublante entre dans la composition des arguments placés sous les signes sinus et cosinus*.

Notre méthode possède les avantages suivants :

1° Tous les calculs sont algébriques et simples.

2° *Dès la première approximation on tient compte de toutes les puissances des masses.*

3° *On obtient comme solution, à la fois les coordonnées rectangulaires et les coordonnées polaires*, ce qui permet des vérifications.

4° La latitude de la planète troublante entre dans la composition des arguments, ce qui facilite les calculs.

---

(1) *J. des Obs.*, 18, 1935, nos 1, 3, 6, pp. 1-14, 33-51, 93-105.

(2) *J. des Obs.*, 22, 1939, nos 4 (4, 5) 5, 6 (6, 7) 7, pp. 65-108, 109-141.

(3) *J. des Obs.*, 25, 1942, nos 7, 8, p. 71-77.

5° *On peut tenir compte successivement des actions des autres planètes avec les mêmes équations. Les seconds membres changeant seuls.*

6° Par l'introduction de la latitude de la planète troublante dans les arguments et par le choix de la variable indépendante, la mise en tables est facilitée.

7° Il n'y a pas de termes séculaires.

Nous pensons donc, vu tous ces avantages, avoir obtenu un moyen d'édifier une théorie moderne du système solaire.

PHOTOCHIMIE. — *Sur l'intervention d'une forme particulière de l'ion* $(\overline{N^3})$ *dans la photolyse des solutions d'azotures alcalins en solution aqueuse.* Note de M. **Maurice Bonnemay**, présentée par M. Jacques Duclaux.

J'ai déjà signalé [1] que la photolyse des solutions d'azotures sous l'influence des rayons ultraviolets (2537 Å) est une réaction par chaînes, le porteur de chaînes étant l'azote actif $(N^{2\star})$ mis en évidence par R. Audubert dans le cas de la thermolyse des azotures solides et de l'électrolyse des mêmes corps. Cette réaction présente une période de latence. Pour expliquer cette particularité, j'ai été conduit à admettre [2] que la décomposition se faisait par l'intermédiaire d'une forme particulière de l'ion $(\overline{N^3})$ que je désigne par $(\overline{N^3})'$, plus absorbante entre 2400 et 2600 Å et présentant une vie moyenne [3] de 5 minutes. Selon cette hypothèse, $(\overline{N^3})'$ se formerait sous l'influence du rayonnement incident et par absorption des photons émis par la désactivation de $(N^{2\star})$ suivant la réaction $(N^{2\star}) = (N^2) + h\nu_1$.

L'étude de la cinétique de la réaction permet de vérifier directement cette hypothèse. En effet, si la photolyse se produit à partir de $(\overline{N^3})'$, la vitesse de décomposition au moment où l'on établit le rayonnement est proportionnelle à la concentration en $(\overline{N^3})'$. Supposons alors que nous soumettions une solution donnée d'azoture au rayonnement ultraviolet, pendant un temps t; d'après nos hypothèses il va s'établir dans la solution une certaine concentration x en $(\overline{N^3})'$ dépendant de t. Faisons alors cesser l'irradiation pendant un espace de temps Δt. La concentration x au temps t va décroître pendant l'intervalle de temps Δt et sera $x + \Delta x$ à l'instant $t + \Delta t$ où nous rétablissons le rayonnement.

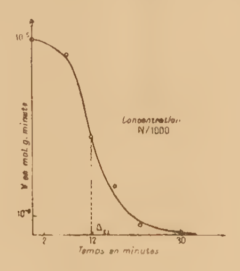
La vitesse V de décomposition à cet instant sera donc proportionnelle à $x + \Delta x (\Delta x < 0)$. On voit donc qu'en faisant plusieurs expériences, avec des Δt variables, on peut connaître l'évolution relative de la concentration x avec le temps quand le rayonnement n'agit pas. En portant les quantités Δt en

(1) *Comptes rendus*, 215, 1942, p. 65.

(2) *Comptes rendus*, 216, 1943, p. 52.

(3) Déterminée spectroscopiquement (*ibid.*, p. 53).

abscisses et les quantités V en ordonnées, on obtient une courbe $V = \varphi(t)$ qui se déduit de la courbe $x = f(t)$ en multipliant les ordonnées par une constante inconnue K et qui présente l'allure indiquée à la figure.



Cette courbe ne correspond à aucune forme analytique simple pour les faibles valeurs de Δt; par contre, à partir d'une certaine valeur de Δt : Δt_1, la courbe $V = \varphi(t)$ répond à la formule

$$V = A\, e^{-\mu t} \qquad (\mu = \text{const.});$$

on a par suite

$$x = \frac{A\, e^{-\mu t}}{K}.$$

Ces faits s'expliquent facilement si l'on considère que la réaction par chaînes continue pendant un certain temps après l'extinction du rayonnement en raison de la présence des $(N^{2\star})$ suivant le schéma ([1])

(1) $(\overline{N^3}) + h\nu = (\overline{N^3})'$ $\quad (N + N = N^2)$,

(2) $(\overline{N^3})' + h\nu = N^{2\star} + N$

(3) $H^2O + (N^{2\star}) + (\overline{N^3}) = N^2 + N^{2\star} + (NH) + (\overline{OH})$ $\quad (NH + H^2O = NH^2OH)$,

(4) $H^2O + (N^{2\star}) + (\overline{N^3})' = N^2 + N^{2\star} + (NH) + (\overline{OH})$

(5) $(N^{2\star}) = N^2 + h\nu_1$,

(6) $(\overline{N^3}) + h\nu_1 = (\overline{N^3})'$,

(7) $(\overline{N^3})' = (\overline{N^3})$.

On voit par suite que la diminution de x [réaction (7)] peut être compensée en partie par le processus inverse [réaction (6)].

Mais, pour les assez grandes valeurs de Δt, la concentration en $N^{2\star}$ devient très faible et la décroissance de $(\overline{N^3})'$ est seulement due à la réaction (7). Si l'on appelle μ le coefficient de vitesse de cette réaction, on voit immédiatement que l'on est conduit, en écrivant la cinétique du phénomène, à l'équation

$$\frac{dx}{dt} = -\mu x.$$

En intégrant on obtient

$$x = B\, e^{-\mu t} \qquad (B = \text{const.}),$$

([1]) Voir *Comptes rendus*, **216**, 1943, p. 154. ν fréquence des photons incidents.

qui correspond bien à l'allure de la courbe expérimentale. En outre, la détermination de μ permet de calculer la vie moyenne τ de $\left(\overline{N^3}\right)'$, selon la formule

$$\tau = \frac{1}{\mu}.$$

Cette détermination donne 5 minutes.

Les expériences précédentes semblent prouver que la photo-décomposition des azotures fait intervenir un corps intermédiaire; d'autre part la bonne concordance de la valeur de la vie moyenne obtenue par la présente méthode et par la spectroscopie confirme que l'ion $\left(\overline{N^3}\right)'$, qui produisait les variations d'absorption déjà signalées ([3]), agit également comme intermédiaire dans la photolyse.

PHYSIQUE INDUSTRIELLE. — *Détermination d'un profil de chambre de combustion donnant lieu à une variation de pression donnée.* Note de M. **Max Serruys**, présentée par M. Armand de Gramont.

On sait les efforts considérables tentés depuis une vingtaine d'années par les techniciens, en vue de donner à la chambre de combustion des moteurs à explosion un profil conduisant à une loi de variation de pression optima, soit du point de vue du rendement, soit du point de vue de la douceur de marche. C'est de ce problème, qui semble n'avoir jusqu'ici fait l'objet que de recherches d'ordre expérimental, dont nous esquissons ci-dessous une solution théorique.

Considérons donc une chambre de combustion dans laquelle nous

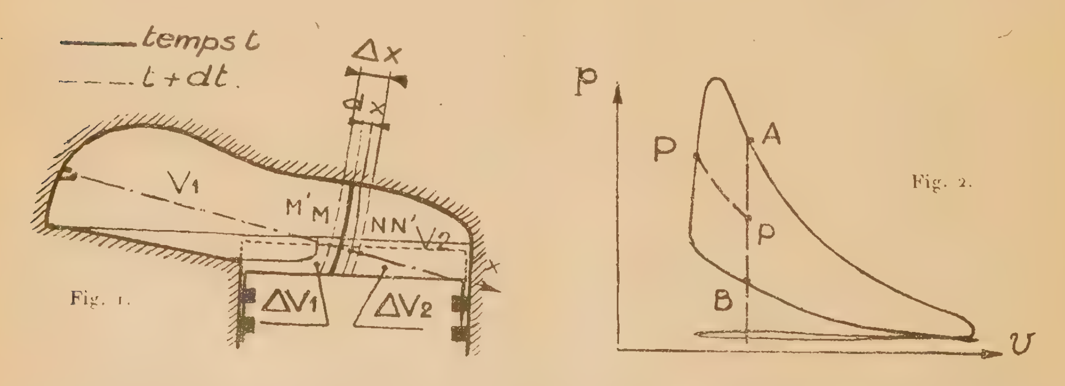


Fig. 1. Fig. 2.

supposerons que la flamme se propage comme une onde sphérique à partir du point d'allumage O (*fig.* 1) et soient à l'instant t :

x, la distance de la flamme au point O;
S, la surface de la flamme;
V_1, le volume des gaz brûlés;
V_2, le volume des gaz non brûlés;
dx, la distance de la position M de la flamme à l'instant t et de la position N qu'occupe au même instant la tranche gazeuse qui brûlera à l'instant $t + dt$;

Δx, la distance qui sépare la position M′ que prend la tranche M à l'instant $t+dt$ de la position N′ de la flamme au même instant;
u, $=dx/dt$, la vitesse de propagation de la flamme;
W, la vitesse apparente de la flamme;
n, le coefficient polytropique de compression des gaz frais;
n', le coefficient polytropique de compression des gaz brûlés;
T, la température du mélange non brûlé;
T′, la température du mélange qui vient de brûler;
a, l'expansion moléculaire;
ΔV_1, l'accroissement *dû au mouvement du piston* du volume occupé par les gaz brûlés;
ΔV_2, l'accroissement *dû au mouvement du piston* du volume occupé par les gaz frais;
C′, la chaleur spécifique *à pression constante* des gaz brûlés.

On a pour les gaz frais $Pv^n=\text{const.}$, d'où $(dP/P)+n(dv/v)=0$, et pour les gaz brûlés $Pv^{n'}=\text{const.}$, d'où $(dP/P)+n'(dv/v)=0$.

On peut donc écrire $\dfrac{dP}{P}=-n\dfrac{dV_2+\Delta V_2}{V_2}=-n\dfrac{dV_1+\Delta V_1}{V_1}$, d'où

$$n\frac{dV_2+\Delta V_2}{V_2}=\frac{n'(dV_1+dV_2)+(n-n')dV_2+n'\Delta V_1+n\,\Delta V_2}{V_1+V_2};$$

or $\Delta x/dx=a(T'/T)$, d'où $dV_1+dV_2=S(\Delta x-dx)=a\left(\dfrac{T'}{T}-1\right)S\,dx$,

$$\frac{dV_2}{S\,dt}=\frac{V^2}{nV_1+n'V_2}\left[n'\left(a\frac{T'}{T}-1\right)\frac{dx}{dt}+\frac{n'\Delta V_1+n\,\Delta V_2}{S\,dt}-n\frac{V_1+V_2}{V_2}\frac{\Delta V_2}{S\,dt}\right],$$

d'où la vitesse apparente

$$(1)\qquad W=u+\frac{dV_2}{S\,dt}=u\left[1+\frac{n'V_2}{nV_1+n'V_2}\left(a\frac{T'}{T}-1\right)\right]+\frac{n'V_2\dfrac{\Delta V_1}{S\,dt}-nV_1\dfrac{\Delta V_2}{S\,dt}}{nV_1+n'V_2}.$$

Par ailleurs, si l'on désigne par m la masse brûlée à l'instant t et par M la masse totale, par P_0 et V_0 la pression et le volume à l'instant initial, on a évidemment $V_2/V_0=[(M-m)/M](P_0/P)^{1/n}$.

Et comme
$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}=-\frac{n}{V_2}\left(\frac{dV_2}{dt}+\frac{\Delta V_2}{dt}\right),$$

$$(3)\qquad \frac{dP}{dt}=\frac{-nP}{nV_1+n'V_2}\left[n'\left(a\frac{T'}{T}-1\right)S\frac{dx}{dt}+n'\frac{\Delta V_1+\Delta V_2}{dt}\right].$$

Enfin on peut déterminer la masse brûlée à un instant quelconque correspondant à un point P d'un diagramme réel représentant l'évolution d'une masse M de mélange, en remarquant que l'énergie totale libérée entre les instants correspondant aux points A et B du même diagramme situés un peu avant le début de la combustion et un peu après la fin de celle-ci a pour valeur

$$W_B=EMc'(T_B-T_A)+\int_A^B P\,dv.$$

Or, en désignant par $p_1v_1T_1$ les conditions de fin d'admission, on a

$T_B - T_A = a(P_A V_A / P_1 V_1) T_1 [(P_B - P_A)/P_A]$, d'où

(4) $$W_B = EMc'a \frac{P_A V_A}{P_1 V_1} T_1 \frac{P_B - P_A}{P_A} + \int_A^B P\,dv,$$

Et pour un point P

(5) $$W_P = EMc'a \frac{P_p V_p}{P_1 V_1} T_1 \frac{P_p - P_A}{P_A} + \int_A^P p\,dv.$$

Si par conséquent on admet que le pourcentage de chaleur perdue par la paroi est constant, on connaît la masse brûlée au point P :

(6) $$m = M \frac{W_P}{W_B}.$$

Enfin on peut remarquer que

(7) $$T = T_1 \left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}},$$

et que l'accroissement de température $T' - T$ réalisé pendant la combustion à pression constante d'une tranche quelconque a pour expression.

(8) $$(T' - T) = \frac{W_B}{EC'M}.$$

Il suffit alors de connaître un diagramme pression-angles de manivelle enregistré sur un moteur muni d'une chambre de combustion de forme connue pour résoudre le problème posé.

Si l'on considère, en effet (*fig.* 2), un point P de ce diagramme, il définit une valeur de P, une valeur de dP/dt et par l'équation (5) une valeur de W_p, d'où l'on déduit la masse brûlée m par les équations (4) et (6) et la valeur de $T' - T$ par (4) et (8). L'équation (2) permet alors de calculer la valeur correspondante de V_2, donc de situer l'emplacement de la flamme, sa surface S et les valeurs de $\Delta V_1/dt$ et $\Delta V_2/dt$. *L'équation* (3) *fournit donc les valeurs de la vitesse de propagation* $u(dx/dt)$ *en fonction de* P, et l'on pourra en tracer la courbe représentative.

Cette courbe étant tracée, il suffira, pour obtenir les sections à donner à la chambre de combustion en vue de réaliser un diagramme donné, de considérer de petits intervalles de temps successifs Δt et de remarquer que l'équation (1) donne le chemin $W\,\Delta t$ parcouru par la flamme pendant un de ces intervalles, et l'équation (2) le volume non brûlé, donc le volume brûlé, ce qui précise parfaitement l'abscisse x de la flamme. L'équation (3) donne alors la valeur de S en fonction de dv/dt qui est connu.

CRISTALLOGRAPHIE. — *Sur les déplacements des microcristaux au sein d'un cristal d'aluminium subissant une déformation permanente par torsion simple.* Note de M. **Raymond Jacquesson**, présentée par M. Charles Mauguin.

Nous avons utilisé des cristaux d'aluminium cylindriques ($d = 0^{mm},8$, $l = 5^{mm}$), constituant des microéprouvettes de torsion qui ont été tordues progressivement jusqu'à rupture (1 tour par millimètre environ). La structure est étudiée à l'aide d'un faisceau large ($d = 1^{mm}$), de rayons X parallèles, monochromatiques et pénétrants (K_{α}Mo).

Les taches radiales produites par la torsion faible ($\tau < 6°$ par millimètre) et provenant de l'allongement des spots du diagramme de Laue disparaissent pour $\tau > 10°$ par millimètre, et sont remplacées par des secteurs curvilignes dont la longueur augmente quand croît la torsion. Lorsque celle-ci atteint 90° par millimètre environ, ces secteurs forment des courbes fermées, d'allure elliptique, dont le grand axe est incliné d'environ 45° sur une direction parallèle à l'axe du fil, tantôt vers la gauche, tantôt vers la droite, suivant le sens de torsion de l'éprouvette.

Pour expliquer ces diagrammes d'aspect bien particulier, nous avons admis une distribution hélicoïdale des microcristaux provenant de la dislocation du cristal initial. Ces microcristaux, dont la taille peut descendre à celle des blocs-mosaïque, conservent intérieurement la structure réticulaire ordinaire de l'aluminium, avec les mêmes distances, mais ont été entraînés dans le mouvement d'ensemble produit par la torsion, de façon que leurs éléments de plan p, q, r, qui, avant la torsion, formaient le plan pqr, sont maintenant tangents à des hélicoïdes ou très peu inclinés sur eux. La famille de plans pqr forme donc, du fait de la torsion, une famille d'hélicoïdes pqr.

Nous avons recherché par le calcul la forme générale des diagrammes et les relations quantitatives caractérisant la réflexion d'un large faisceau de rayons X, monochromatiques et parallèles, sur une famille d'hélicoïdes de pas graduellement décroissant (τ croissant) lorsque la condition de Bragg $n\lambda = 2\, d_{pqr} \sin\theta_{pqr}$ continue à être valable.

Les conclusions de ce calcul se trouvent entièrement vérifiées par les diagrammes expérimentaux, ce qui justifie l'hypothèse d'une texture hélicoïdale.

Ainsi les particules cristallisées de l'aluminium provenant de la dislocation du cristal initial se comportent, bien au delà de la limite d'élasticité de ce métal, comme le font celles d'un corps élastique de même forme, soumis à la même déformation puisque, dans les deux cas, des plans deviennent par torsion des hélicoïdes.

La différence fondamentale entre le milieu à texture granulaire qu'est l'aluminium tordu et le milieu élastique continu est que, le couple de torsion

diminuant, les microcristaux d'aluminium restent figés dans une position voisine de celle où les a amenés la torsion maximum de l'éprouvette alors que, dans le solide élastique, il y aurait retour à l'état initial.

On peut ainsi imaginer le processus de la dislocation de l'aluminium. Supposons un volume *dv* pris au sein du cristal. Sous l'influence de la déformation, ce volume est entraîné dans le mouvement d'ensemble et, comme dans un solide élastique, est soumis à des variations de forme et de volume concevables dans ce dernier, mais incompatibles avec la persistance de la forme et des dimensions des mailles cristallines. Il va donc se produire dans ce volume *dv* des déchirures et des glissements modifiant profondément l'architecture cristalline et créant en particulier des écarts angulaires entre les blocs voisins, d'où rotation relative de ceux-ci. Dans ces zones de discontinuité, des atomes vont se disposer de manière à occuper des positions moyennes où leur énergie potentielle a un minimum relatif. Ils gênent ainsi le retour les uns vers les autres des blocs primitivement jointifs et provoquent une déformation permanente.

De plus, cette structure perturbée, relativement instable, a tendance à évoluer avec le temps vers une plus stable, et l'on peut ainsi expliquer les modifications lentes de certaines propriétés mécaniques des métaux (frottement interne, par exemple) aussitôt après une déformation permanente.

La séance est levée à 16h.

L. B.